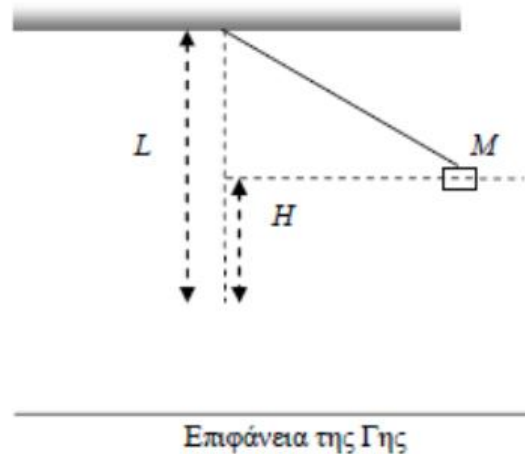


ΚΡΟΥΣΗ ΜΕ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

1.

Σώμα μάζας  $M = 4 \text{ kg}$  είναι δεμένο στην άκρη νήματος μήκους  $L = 1 \text{ m}$  και ισορροπεί κατακόρυφα. Κάποια στιγμή ανυψώνουμε το σώμα, σε κατακόρυφη απόσταση  $H = 45 \text{ cm}$  από την αρχική του θέση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, και το αφήνουμε ελεύθερο.



**Δ1)** Υπολογίστε την ταχύτητα που έχει το σώμα μάζας  $M$  όταν περνά από την κατακόρυφο.

*Μονάδες 5*

**Δ2)** Τη στιγμή που το σώμα μάζας  $M$  διέρχεται από την κατακόρυφο, δεύτερο σώμα μάζας  $m = 0,5 \text{ kg}$  κινούμενο οριζόντια και αντίθετα από το σώμα μάζας  $M$  σφηνώνεται σε αυτό, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί συσσωμάτωμα. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του σώματος μάζας  $m$  ώστε το συσσωμάτωμα να παραμείνει ακίνητο αμέσως μετά την κρούση;

*Μονάδες 5*

**Δ3)** Υπολογίστε τη μεταβολή του μέτρου της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα μάζας  $M$  και στο συσσωμάτωμα αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση.

*Μονάδες 7*

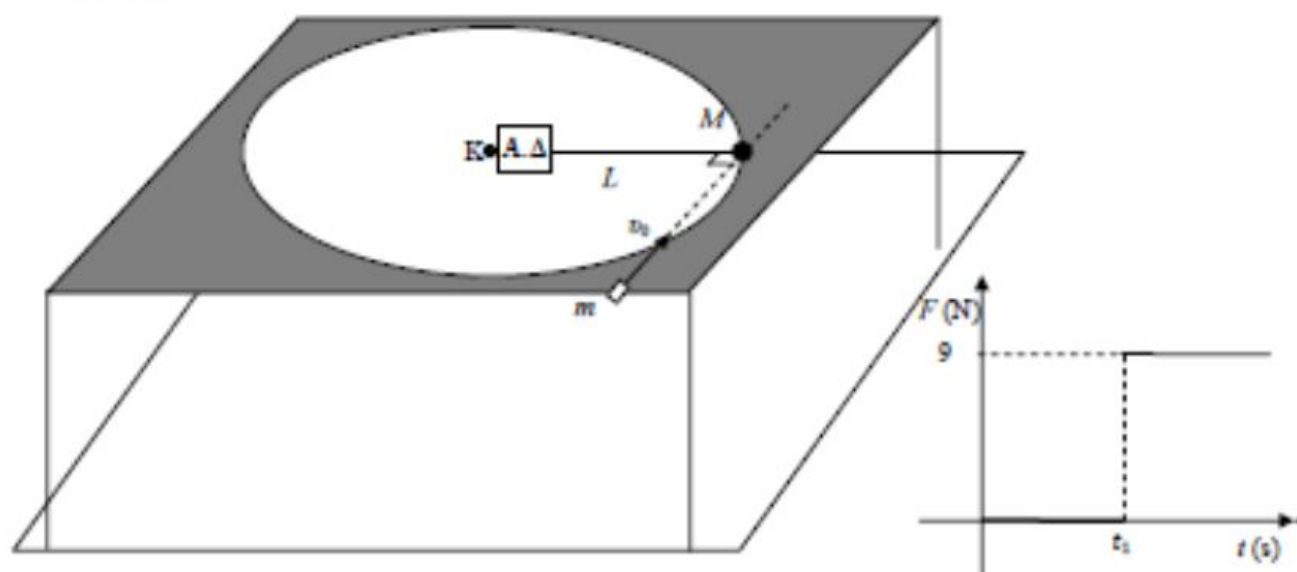
**Δ4)** Με ποια ταχύτητα θα πρέπει να κινείται το σώμα μάζας  $m$  πριν από την κρούση, ώστε το συσσωμάτωμα που θα προκύψει να κινηθεί αμέσως μετά την κρούση στην ίδια κατεύθυνση με αυτή που κινούταν το σώμα μάζας  $M$  πριν την κρούση και να φθάσει σε θέση που να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία  $\theta$ , για την οποία  $\sin\theta = 0,8$ ;

*Μονάδες 8*

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

2.

Πάνω σε ένα τραπέζι βρίσκεται ακίνητο σώμα μάζας  $M = 3 \text{ kg}$  δεμένο με τη βοήθεια ενός αισθητήρα δύναμης (Α.Δ) από ένα σημείο Κ στην άκρη νήματος μήκους  $L = 1 \text{ m}$  όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Κάποια στιγμή εκτοξεύουμε σώμα μάζας  $m = 1 \text{ kg}$  που βρίσκεται στην άκρη του τραπεζιού και μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε αυτό έχοντας συντελεστή τριβής  $\mu = 0,4$  με ταχύτητα  $v_0$ , η προέκταση της οποίας σχηματίζει γωνία  $90^\circ$  με το νήμα, οπότε το σώμα μάζας  $m$  σφηνώνεται στο σώμα μάζας  $M$  και σχηματίζεται συσσωμάτωμα. Το συσσωμάτωμα κινείται χωρίς τριβή στο τραπέζι. Τα δεδομένα από τον αισθητήρα δύναμης φαίνονται, επεξεργασμένα, στην ακόλουθη γραφική παράσταση.



Δ1) Εξηγήστε τι συμβαίνει τη χρονική στιγμή  $t_1$ , κατά την οποία αλλάζει το μέτρο της δύναμης.

*Μονάδες 4*

Δ2) Υπολογίστε την ταχύτητα που αποκτά το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση.

*Μονάδες 5*

Δ3) Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος μάζας  $m$  λίγο πριν την κρούση καθώς και την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση.

*Μονάδες 8*

Δ4) Αν η απόσταση που διανύει το σώμα μάζας  $m$  από τη θέση που εκτοξεύτηκε μέχρι τη θέση που συγκρούστηκε πλαστικά με το σώμα μάζας  $M$  είναι  $2 \text{ m}$ , υπολογίστε την ταχύτητα εκτόξευσης  $v_0$ .

*Μονάδες 8*

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

3.

Ένα σώμα Α, μάζας  $m = 2 \text{ kg}$ , κινείται σε λεία επιφάνεια οριζώντιου τραπέζιού με ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 40 \text{ m/s}$ . Κατά την κίνησή του συναντάει ένα άλλο ακίνητο σώμα Β τριπλάσιας μάζας και συγκρούεται με αυτό. Μετά τη σύγκρουση το πρώτο σώμα κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου  $v_2 = 5 \text{ m/s}$ . Η διάρκεια της σύγκρουσης είναι  $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$ .

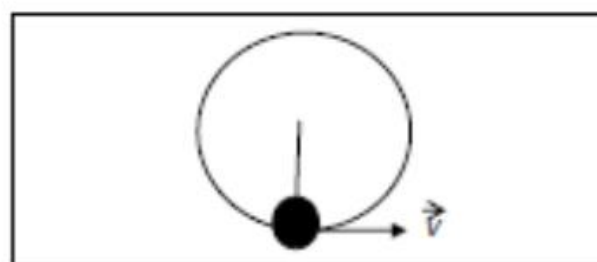
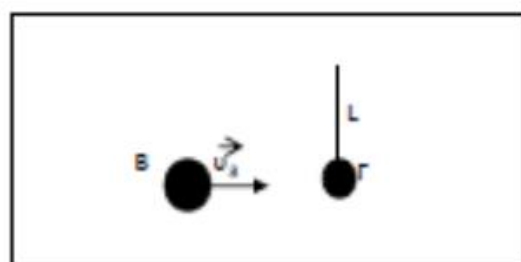
Δ1) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας  $v_3$  του σώματος Β μετά την κρούση.

*Μονάδες 4*

Δ2) Να βρεθούν οι μέσες τιμές των μέτρων των δυνάμεων που ασκούνται στα δύο σώματα κατά την κρούση.

*Μονάδες 5*

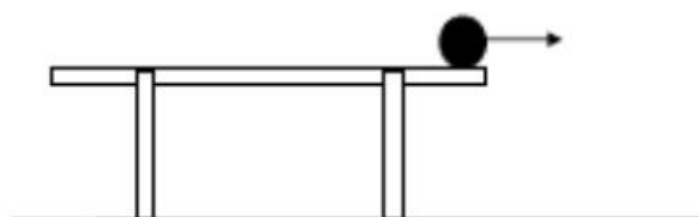
Δ3) Το σώμα Β κινείται στην οριζόντια επιφάνεια και στην πορεία του συναντά ένα ακίνητο σώμα Γ μάζας  $2m$ , το οποίο είναι δεμένο στην άκρη νήματος, μήκους  $L = 0,9 \text{ m}$ , η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη στην επιφάνεια λείου τραπέζιού. Μετά την κρούση τα δύο σώματα ενώνονται και το συσσωμάτωμα διαγράφει έναν πλήρη κύκλο.



Να υπολογιστούν η περίοδος και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, καθώς και η κεντρομόλος επιτάχυνση του συσσωματώματος.

*Μονάδες 8*

Δ4) Μόλις συμπληρωθεί ένας πλήρης κύκλος, το νήμα κόβεται και το συσσωμάτωμα συνεχίζει την κίνησή του εκτελώντας οριζόντια βολή από το τραπέζι που έχει ύψος  $h = 80 \text{ cm}$ .



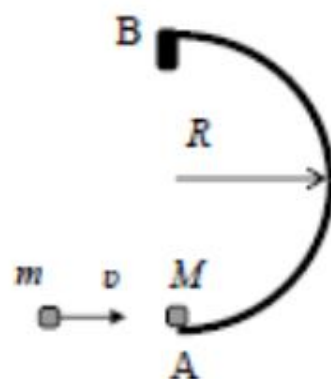
Να υπολογιστούν ο χρόνος που χρειάζεται το συσσωμάτωμα να φθάσει στο έδαφος, η οριζόντια μετατόπισή του και η ταχύτητα με την οποία φθάνει στο έδαφος.

*Μονάδες 8*

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

4.

Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο (την κάτοψη του οποίου βλέπετε στο σχήμα) υπάρχει ακλόνητα στερεωμένο ένα σιδερένιο έλασμα, ημικυκλικού σχήματος ακτίνας  $R = 20 \text{ cm}$ . Στο ένα άκρο του ελάσματος (σημείο  $A$ ) είναι τοποθετημένο (ακίνητο) ένα σώμα μάζας  $M = 1 \text{ kg}$ . Ένα σώμα μάζας  $m = 1 \text{ kg}$  κινείται με ταχύτητα  $v = 20 \text{ m/s}$  και συγκρούεται με το σώμα  $M$ . Μετά την κρούση δημιουργείται συσσωμάτωμα που κινείται κυκλικά, λόγω του ελάσματος και χωρίς να χάνει την επαφή του με αυτό, με ταχύτητα σταθερού μέτρου.



$\Delta 1$ ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

*Μονάδες 7*

$\Delta 2$ ) Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το έλασμα κατά την διάρκεια της κυκλικής του κίνησης;

*Μονάδες 7*

$\Delta 3$ ) Πόσο χρόνο διαρκεί η κίνηση του συσσωματώματος από το  $A$  στο  $B$ ;

*Μονάδες 6*

$\Delta 4$ ) Στο σημείο  $B$  το συσσωμάτωμα προσκρούει σε ακλόνητο στήριγμα και ο χρόνος για να σταματήσει είναι  $\Delta t = 0,1 \text{ sec}$ . Πόση είναι η μέση δύναμη που ασκήθηκε από το ακλόνητο στήριγμα στο συσσωμάτωμα;

*Μονάδες 5*

5.

Σώμα μάζας  $m_1$  κινούμενο σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου,  $v_1 = 10 \frac{m}{s}$  ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας  $m_2$ , με το οποίο βρίσκεται στην ίδια ευθεία. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα μάζας  $m_1$  κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου,  $v_1' = 5 \frac{m}{s}$  ενώ το σώμα μάζας  $m_2$  αποκτά ταχύτητα μέτρου  $v_2' = 5 \frac{m}{s}$

Δ1) Να προσδιορίσετε το λόγο των μαζών  $\frac{m_1}{m_2}$ .

*Μονάδες 6*

Δ2) Να βρεθεί το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας  $m_1$  που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας  $m_2$  λόγω της κρούσης.

*Μονάδες 7*

Δ3) Αν  $m_1 = 0,5 kg$  να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η ορμή του σώματος αυτού κατά τη διάρκεια της ολίσθησης του πάνω στο δάπεδο μετά την κρούση, εάν θεωρηθεί ότι είναι σταθερός σε όλη τη διάρκεια της ολίσθησης.

*Μονάδες 6*

Δ4) Να υπολογισθεί πόσο θα απέχουν τα σώματα όταν σταματήσουν.

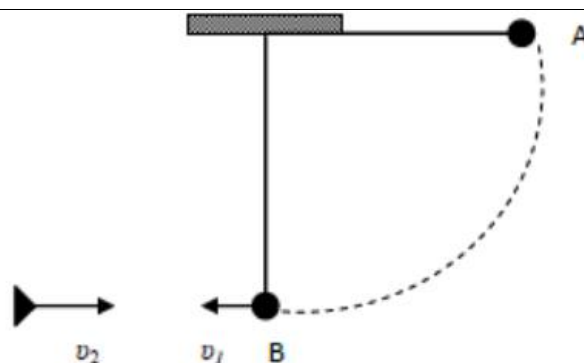
*Μονάδες 6*

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του επιπέδου και κάθε σώματος είναι  $\mu = 0,1$ .

Δίνεται  $g = 10 \frac{m}{s^2}$

6.

Σώμα μάζας  $m_1 = 2 \text{ kg}$  είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους  $l = 1,25 \text{ m}$ . Το σώμα αφήνεται από το σημείο A, με το νήμα οριζόντιο, και διαγράφει το τεταρτοκύκλιο που φαίνεται στο σχήμα. Διερχόμενο από το κατώτερο σημείο της τροχιάς του B, όπου η ταχύτητά του έχει μέτρο  $v_1$ , συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας  $m_2 = 3 \text{ kg}$  που κινείται με ταχύτητα  $v_2$



αντίθετης κατεύθυνσης από την  $v_1$ . Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται κινείται με ταχύτητα μέτρου  $V = 4 \text{ m/s}$ , με κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση της ταχύτητας  $v_2$ . Να υπολογίσετε:

**Δ1)** Το μέτρο της ταχύτητας  $v_1$ .

*Μονάδες 6*

**Δ2)** Την τάση του νήματος καθώς το σώμα  $m_1$  διέρχεται από το σημείο B.

*Μονάδες 7*

**Δ3)** Το μέτρο της ταχύτητας  $v_2$ .

*Μονάδες 6*

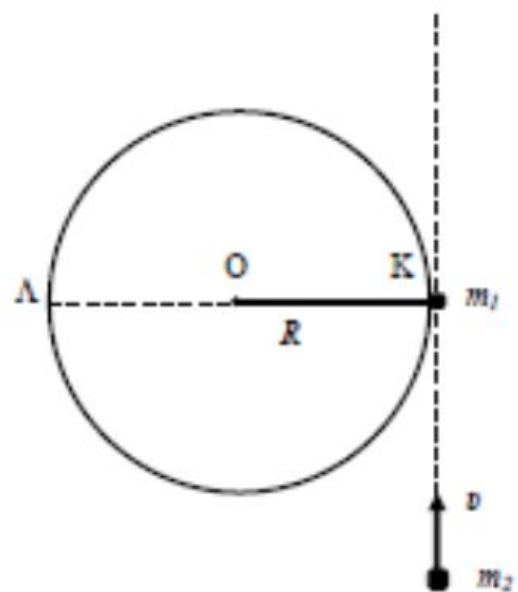
**Δ4)** Την αύξηση της θερμικής ενέργειας κατά την κρούση.

*Μονάδες 6*

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

7.

Ένα σώμα  $\Sigma_1$ , μάζας  $m_1 = 2 \text{ kg}$ , είναι στερεωμένο στο άκρο Κ μη εκτατού και αβαρούς νήματος και βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο (κάτοψη του οποίου φαίνεται στο σχήμα). Το άλλο άκρο του νήματος, είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο Ο. Το μήκος του νήματος είναι  $1 \text{ m}$ . Ένα δεύτερο σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 1 \text{ kg}$  κινείται πάνω στο λείο επίπεδο με ταχύτητα σταθερού μέτρου  $v = 40 \text{ m/s}$ . Η διεύθυνση της ταχύτητας είναι εφαπτόμενη στο σημείο Κ (όπως φαίνεται στο σχήμα). Όταν το σώμα  $\Sigma_2$  φτάνει στο σημείο Κ συγκρούεται μετωπικά με το σώμα  $\Sigma_1$ . Μετά την κρούση το σώμα  $\Sigma_2$  αποκτά ταχύτητα ίση με  $v_2 = 8 \text{ m/s}$  και συνεχίζει να κινείται ευθύγραμμα στην ίδια διεύθυνση. Να θεωρήσετε ότι η κρούση γίνεται ακαριαία.



**Δ1)** Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος  $\Sigma_1$  αμέσως μετά την κρούση.

*Μονάδες 6*

**Δ2)** Να δικαιολογήσετε γιατί μετά την κρούση το σώμα  $\Sigma_1$  εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και να υπολογίσετε το χρόνο που κάνει για να φτάσει στο σημείο Α για πρώτη φορά.

*Μονάδες 6*

**Δ3)** Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων όταν το σώμα  $\Sigma_1$  έχει εκτελέσει δύο πλήρεις περιστροφές.

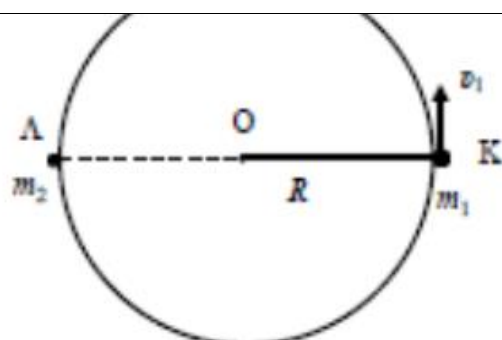
*Μονάδες 6*

**Δ4)** Να μελετήσετε αν κατά την κρούση διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ .

*Μονάδες 7*

8.

Μια ράβδος μήκους  $R = 1 \text{ m}$  και αμελητέας μάζας βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο (κάτοψη του οποίου φαίνεται στο σχήμα) και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το σημείο  $O$ . Στο άλλο της άκρο είναι στερεωμένο σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 2 \text{ kg}$  το οποίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 20 \text{ m/s}$ , ξεκινώντας τη χρονική στιγμή  $t = 0 \text{ s}$  από το σημείο  $K$ . Στο σημείο  $A$  (αντιδιαμετρικό του  $K$ ) βρίσκεται ακίνητο σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 1 \text{ kg}$ .



**Δ1)** Να σχεδιαστεί και να υπολογιστεί το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που ασκείται στο σώμα  $\Sigma_1$ . Από πού ασκείται η δύναμη αυτή;

*Μονάδες 6*

Όταν το σώμα  $\Sigma_1$  φτάνει στο σημείο  $A$  συγκρούεται μετωπικά με το σώμα  $\Sigma_2$ . Μετά την κρούση το σώμα  $\Sigma_2$  αποκτά ταχύτητα ίση με  $v_2 = 20 \text{ m/s}$  και κινείται ευθύγραμμα πάνω στο λείο επίπεδο. Να θεωρήσετε ότι η κρούση γίνεται ακαριαία.

**Δ2)** Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος  $\Sigma_1$  αμέσως μετά την κρούση.

*Μονάδες 6*

**Δ3)** Να βρεθεί ο χρόνος από τη χρονική στιγμή  $t = 0 \text{ s}$  που το σώμα  $\Sigma_1$  ξεκίνησε από το σημείο  $K$  μέχρι τη χρονική στιγμή που ξαναβρέθηκε στο σημείο  $K$ .

*Μονάδες 6*

**Δ4)** Να μελετήσετε αν κατά την κρούση διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ .

*Μονάδες 7*



9.

Ένα τρένακι αποτελείται από δύο μικρά βαγόνια και μπορεί να κινείται με ομαλή κυκλική κίνηση σε κυκλικές ράγες ακτίνας  $r = \frac{2}{\pi}$  m με περίοδο  $T = 2$  s.

Δ1) Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας περιστροφής του αντικειμένου.

*Μονάδες 6*

Κάποια χρονική στιγμή το τρένο υφίσταται μια μικρή έκρηξη και τα δύο βαγόνια αποχωρίζονται μεταξύ τους, ενώ συνεχίζουν να κινούνται στις κυκλικές ράγες. Η μάζα και των δύο μαζί είναι  $m = 3$  kg ενώ η μάζα του μπροστινού βαγονιού είναι  $m_1 = 1$  kg. Το μπροστινό βαγόνι μετά την έκρηξη κινείται με ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  στην ίδια κατεύθυνση με την κατεύθυνση κίνησης του τρένου.

Δ2) Να υπολογίσετε την τιμή της ταχύτητας του άλλου βαγονιού.

*Μονάδες 6*

Δ3) Να βρείτε το ποσό της ενέργειας που ελευθερώνεται κατά την έκρηξη.

*Μονάδες 6*

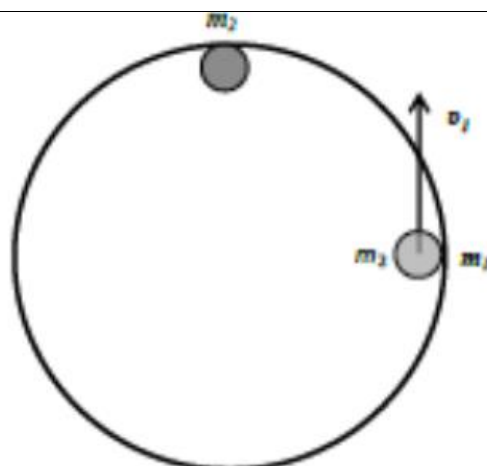
Δ4) Πόση γωνία θα έχει διαγράψει το κάθε βαγόνι μέχρι να συναντηθούν για πρώτη φορά, μετά την έκρηξη;

*Μονάδες 7*

Στην επίλυση του προβλήματος θεωρούμε τα βαγόνια ως υλικά σημεία.

10.

Δύο σφαιρίδια  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  με μάζες  $m_1 = 4 \text{ kg}$  και  $m_2 = 6 \text{ kg}$  αντίστοιχα μπορούν να κινούνται στο εσωτερικό κυκλικού δακτυλίου ακτίνας  $R = 2 \text{ m}$  που είναι ακλόνητα στερεωμένος σε λείο οριζόντιο τραπέζι (κάτοψη του οποίου εικονίζεται στο σχήμα). Οι τριβές μεταξύ των σφαιριδίων και του κυκλικού δακτυλίου θεωρούνται αμελητέες, όπως και οι διαστάσεις τους. Αρχικά το σφαιρίδιο  $\Sigma_2$  είναι ακίνητο, ενώ το  $\Sigma_1$  εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών του ρολογιού με ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 5 \text{ m/s}$ . Αν τα σφαιρίδια  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  συγκρουστούν πλαστικά, να υπολογίσετε :



**Δ1)** Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος μετά την κρούση καθώς και την περίοδο της κίνησης του.

*Μονάδες 6*

**Δ2)** Την απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την διάρκεια της πλαστικής κρούσης.

*Μονάδες 5*

**Δ3)** Σε κάποια άλλη περίπτωση, αλλάζοντας το υλικό των σφαιριδίων, αλλά διατηρώντας τις μάζες τους, τα σφαιρίδια συγκρούονται χωρίς να δημιουργηθεί συσσωμάτωμα. Αν η ταχύτητα της σφαίρας  $m_2$  αμέσως μετά την κρούση είναι  $4 \text{ m/s}$ , να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας  $m_1$  αμέσως μετά την κρούση. Να ελέγξετε αν στην κρούση αυτή διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών.

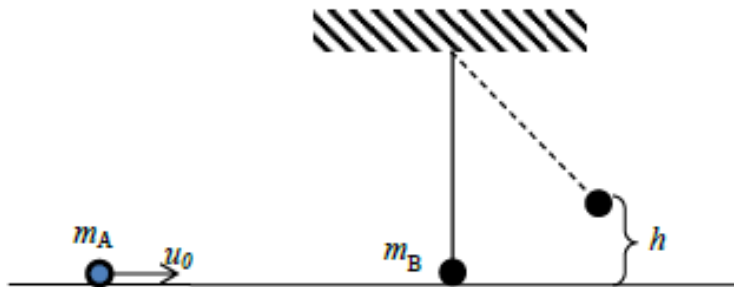
*Μονάδες 8*

**Δ4)** Ποιο είναι το μήκος του τόξου που διανύει το κάθε ένα από τα δύο σώματα μέχρι την επόμενη σύγκρουσή τους;

*Μονάδες 6*

**11.**

Το σώμα A μάζας  $m_A = 1 \text{ kg}$  κινείται με ταχύτητα  $u_0 = 8 \text{ m/s}$  σε λείο οριζόντιο δάπεδο και συγκρούεται μετωπικά με το σώμα B, που έχει μάζα  $m_B = 3 \text{ kg}$  και βρίσκεται στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού (που δεν αλλάζει το μήκος του) σχοινιού. Μετά τη σύγκρουση το σώμα B ανυψώνεται κατά  $h = 0,45 \text{ m}$  από την αρχική του θέση.



**Δ1)** Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος B, αμέσως μετά την κρούση.

*Μονάδες 8*

**Δ2)** Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής του σώματος A κατά την κρούση, λαμβάνοντας ως θετική την αρχική φορά κίνησης του σώματος A.

*Μονάδες 6*

**Δ3)** Να υπολογιστεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος A πριν και μετά την κρούση.

*Μονάδες 6*

**Δ4)** Να υπολογιστεί το ποσό θερμικής ενέργειας (θερμότητας) που ελευθερώνεται εξ αιτίας της κρούσης των δύο σωμάτων.

*Μονάδες 5*

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.